

**Exercice 1**

Déterminer la formulation forte du problème de la flexion d'une poutre (théorie de Bernoulli-Euler), caractérisée par la fonctionnelle et les conditions aux limites

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^\ell [EI(d^2w/dx^2)^2 - 2pw]dx - w(\ell)P$$

$$w(0) = (dw/dx)|_{x=0} = 0$$

où  $w(x)$  désigne le déplacement transversal de la poutre,  $E$  est le module d'élasticité du matériau,  $\ell$  dénote la longueur de la poutre et  $I$  représente le moment d'inertie de la section de la poutre, tandis que les grandeurs  $p$  et  $P$  sont respectivement une charge répartie et une force ponctuelle. Rechercher la forme faible et définir les classes de fonctions admissibles pour les déplacements réel et virtuel.

**Exercice 2**

Démontrer que l'erreur  $e^h = u - u^h$  entre la solution exacte  $u$  d'un problème unidimensionnel régulier et son approximation  $u^h$  au moyen d'éléments finis à deux nœuds (fonctions de forme linéaires par morceaux) suit l'estimation *a priori* suivante

$$\|e^h\|_0 \equiv \left[ \int_0^\ell (e^h)^2 dx \right]^{1/2} \leq C_0 h^2 \quad \text{avec } h = \max_e \ell$$

où  $h$  est la longueur caractéristique du réseau d'éléments finis, correspondant à la plus grande des distances  $\ell$  entre deux nœuds d'un élément, et  $C_0$  dénote le facteur de convergence.